गणितीय उपपत्तियाँ A1

A1.1 भूमिका

हमारे दैनिक जीवन में तर्क प्रस्तुत करने और स्पष्ट चिंतन करने की क्षमता अत्यधिक उपयोगी होती है। उदाहरण के लिए मान लीजिए एक राजनीतिज्ञ आप से यह कहता है कि 'यदि आप साफ-सुथरी सरकार चाहते हैं तो आपको मुझे वोट देना चाहिए।' वास्तव में आपके अंदर वह यह विश्वास पैदा करना चाहता है कि यदि आपने उसे वोट नहीं दिया, तो आपको साफ-सुथरी सरकार नहीं मिल सकती है। इसी प्रकार, यदि एक विज्ञापन में यह बताया जाता है कि 'बुद्धिमान व्यक्ति XYZ प्रकार के जूते पहनते हैं' तो कंपनी आपके अंदर यह बात पैदा करना चाहती है कि यदि आप XYZ प्रकार के जूते नहीं पहनते हैं, तो आप एक बुद्धिमान व्यक्ति नहीं हैं। आप स्वयं यह देख सकते हैं कि ऊपर दिए गए दोनों ही कथन आम जनता को बहका सकते हैं। अतः यदि हम तर्क प्रस्तुत करने की प्रक्रिया को सही प्रकार से समझते हैं, तो अनजाने में हम इस प्रकार के जाल में नहीं फँस सकते हैं।

तर्क प्रस्तुत करने का सही प्रयोग गणित का आधार है, विशेष रूप से उपपत्तियाँ प्रस्तुत करने में। कक्षा IX में, आपको उपपत्तियों की संकल्पना से परिचित कराया गया है और वास्तव में आपने अनेक कथनों, विशेष रूप से ज्यामिति के कथनों को सिद्ध भी किया है। स्मरण कीजिए कि एक उपपत्ति में अनेक गणितीय कथन होते हैं, जिनमें से प्रत्येक कथन उपपत्ति के पिछले कथन से या पहले सिद्ध किए गए प्रमेय से, या किसी अभिगृहीत से, या परिकल्पनाओं से तार्किक रूप से निगमित होता है। उपपत्ति की रचना में प्रयुक्त होने वाला हमारा मुख्य साधन निगमनिक तर्कण की प्रक्रिया है।

इस अध्याय में हम सबसे पहले इस बात पर पुनर्विचार करेंगे कि गणितीय कथन क्या होता है। इसके बाद हम अनेक उदाहरणों द्वारा निगमनिक तर्कण देने के कौशल को और

अधिक सक्षम बनाने पर विचार करेंगे। यहाँ हम निषेध की संकल्पना और एक दिए हुए कथन का निषेध ज्ञात करने के बारे में भी चर्चा करेंगे। इसके बाद हम इस बात की चर्चा करेंगे कि किसी दिए हुए कथन का विलोम ज्ञात करने का अर्थ क्या होता है। अंत में, हम अनेक प्रमेयों की उपपत्तियों का विश्लेषण करके कक्षा IX में पढ़ी गई किसी उपपत्ति के अवयवों पर पुनर्विचार करेंगे। यहाँ हम विरोधोक्ति (अंतर्विरोध) द्वारा उपपत्ति की धारणा पर भी विचार करेंगे, जिसे आप कक्षा IX में सीख चुके हैं तथा इस पुस्तक के अनेक अन्य अध्यायों में भी प्रयोग कर चुके हैं।

A1.2 गणितीय कथनों का पुनरीक्षण

स्मरण कीजिए कि 'कथन' एक अर्थपूर्ण वाक्य होता है, जो न तो आदेश होता है, न विस्मयादिबोधक (exclamation) होता है और न ही प्रश्न होता है। उदाहरण के लिए 'वर्ल्ड कप के फाइनल में कौन-सी दो टीमें खेल रही हैं?' एक प्रश्न है, एक कथन नहीं है। 'जाइए और अपना गृहकार्य पूरा कीजिए', एक आदेश है, एक कथन नहीं है। 'क्या ही बढ़िया गोल है!' एक विस्मयादिबोधक है, एक कथन नहीं है।

स्मरण रहे कि व्यापक रूप में वाक्य निम्नलिखित में से कोई एक हो सकता है:

- *सत्य*
- *असत्य*
- *संदिग्ध*

कक्षा IX में, आप यह भी पढ़ चुके हैं कि गणित में, **कथन केवल तभी स्वीकार्य होता है जबकि वह या तो सत्य हो या असत्य हो।** अतः संदिग्ध वाक्यों को गणितीय कथन नहीं माना जाता है।

आइए हम कुछ उदाहरण लेकर अपने ज्ञान को दोहरा लें।

उदाहरण 1 : बताइए कि निम्नलिखित वाक्य कथन है या नहीं है। अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

(i) सूर्य पृथ्वी की परिक्रमा करता है।

(ii) वाहन के चार पहिए होते हैं।

(iii) प्रकाश की चाल लगभग 3×10^5 km/s है।

(iv) नवंबर से मार्च तक कोलकाता की सड़क बंद रहेगी।

(v) सभी मानव नश्वर होते हैं।

हल :

(i) यह वाक्य असत्य है, क्योंकि खगोलविदों ने यह स्थापित कर दिया है कि पृथ्वी सूर्य की परिक्रमा करती है। अतः यह एक कथन है।

(ii) यह वाक्य संदिग्ध है, क्योंकि हम यह निर्णय नहीं कर सकते हैं कि यह सत्य है या असत्य है। यह इस बात पर निर्भर करता है कि वाहन कौन-सा है, क्योंकि वाहन 2, 3, 4, 6, 10, आदि पहियों वाला हो सकता है। अतः यह एक कथन नहीं है।

(iii) यह वाक्य सत्य है, जैसाकि भौतिकविदों नें सत्यापित किया है। अतः यह एक कथन है।

(iv) यह वाक्य संदिग्ध है, क्योंकि यह स्पष्ट नहीं है कि यहाँ किस सड़क के बारे में कहा जा रहा है। अतः यह एक कथन नहीं है।

(v) यह वाक्य सत्य है, क्योंकि प्रत्येक मानव को कभी न कभी मरना ही है। अतः यह एक कथन है।

उदाहरण 2 : बताइए कि निम्नलिखित वाक्य सत्य हैं या असत्य हैं। अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

(i) सभी समबाहु त्रिभुज समद्विबाहु त्रिभुज होते हैं।

(ii) कुछ समद्विबाहु त्रिभुज समबाहु त्रिभुज होते हैं।

(iii) सभी समद्विबाहु त्रिभुज समबाहु त्रिभुज होते हैं।

(iv) कुछ परिमेय संख्याएँ पूर्णांक होती हैं।

(v) कुछ परिमेय संख्याएँ पूर्णांक नहीं होती हैं।

(vi) सभी पूर्णांक परिमेय संख्या नहीं होते हैं।

(vii) किन्हीं दो परिमेय संख्याओं के बीच एक भी परिमेय संख्या नहीं होती है।

हल :

(i) यह वाक्य सत्य है, क्योंकि समबाहु त्रिभुज की भुजाएँ समान होती हैं, अतः ये समद्विबाहु त्रिभुज हैं।

(ii) यह वाक्य सत्य है, क्योंकि वे समद्विबाहु त्रिभुज जिसके आधार कोण $60°$ के हैं, समबाहु त्रिभुज होते हैं।

(iii) यह वाक्य असत्य है। इसका एक प्रत्युदाहरण दीजिए।

(iv) यह वाक्य सत्य है, क्योंकि $\frac{p}{q}$ के रूप की ऐसी परिमेय संख्याएँ, जहाँ p पूर्णांक हैं और $q = 1$, पूर्णांक हैं। (उदाहरण के लिए $3 = \frac{3}{1}$)

(v) यह वाक्य सत्य है, क्योंकि $\frac{p}{q}$ के रूप की ऐसी परिमेय संख्याएँ, जहाँ p, q पूर्णांक हैं और q, p को विभाजित नहीं करता, पूर्णांक नहीं हैं (उदाहरण के लिए $\frac{3}{2}$)

(vi) यह वाक्य इस कथन के समान है कि 'एक ऐसा पूर्णांक है, जो परिमेय संख्या नहीं है'। यह वाक्य असत्य है, क्योंकि सभी पूर्णांक परिमेय संख्या होते हैं।

(vii) यह वाक्य असत्य है। जैसाकि आप जानते हैं किन्हीं दो परिमेय संख्याओं r और s के बीच $\frac{r+s}{2}$ होती हैं, जो एक परिमेय संख्या है।

उदाहरण 3 : यदि $x < 4$ है तो निम्नलिखित कथनों में कौन से सत्य हैं? अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

(i) $2x > 8$ (ii) $2x < 6$ (iii) $2x < 8$

हल :

(i) यह कथन असत्य है, क्योंकि, उदाहरण के लिए, $x = 3 < 4$, $2x > 8$ को संतुष्ट नहीं करता है।

(ii) यह कथन असत्य है, क्योंकि उदाहरण के लिए $x = 3.5 < 4$, $2x < 6$ को संतुष्ट नहीं करता है।

(iii) यह कथन सत्य है, क्योंकि यह वही है जो कि $x < 4$ है।

उदाहरण 4 : उपयुक्त प्रतिबंध लगाकर निम्नलिखित कथनों का पुनर्कथन दीजिए, जिससे कि वे कथन सत्य हो जाएँ?

(i) यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों, तो वह एक आयत होता है।

(ii) किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के दो बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समांतर होती है।

(iii) सभी धन पूर्णांक p के लिए $\sqrt{p}$ अपरिमेय होता है।

(iv) सभी द्विघात समीकरण के दो वास्तविक मूल होते हैं।

हल :

(i) यदि एक समांतर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों, तो वह एक आयत होता है।

(ii) एक त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समांतर होती है।

(iii) सभी अभाज्य संख्याओं p के लिए $\sqrt{p}$ अपरिमेय होता है।

(iv) सभी द्विघात समीकरण के अधिक से अधिक दो वास्तविक मूल होते हैं।

टिप्पणी : ऊपर के कथनों का पुनःकथन अन्य प्रकार भी दिया जा सकता है। उदाहरण के लिए (iii) का पुनःकथन ' $\sqrt{p}$ अपरिमेय है, जहाँ p ऐसा धन पूर्णांक हैं, जो पूर्ण वर्ग नहीं है।'

प्रश्नावली A1.1

1. बताइए कि निम्नलिखित वाक्य कथन हैं या नहीं। यदि कथन हैं, तो बताइए कि वे सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तर का औचित्य भी दीजिए।

(i) गणित की सभी पाठ्य पुस्तकें रोचक होती हैं।

(ii) पृथ्वी से सूर्य की दूरी लगभग 1.5×10^8 km है।

(iii) सभी मानव वृद्ध हो जाते हैं।

(iv) उत्तरकाशी से हर्सिल की यात्रा थका देने वाली है।

(v) महिला ने बाइनाकुलर से एक हाथी देखा।

2. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है या असत्य। अपने उत्तर का औचित्य भी दीजिए।

(i) सभी षट्भुज बहुभुज होते हैं।

(ii) कुछ बहुभुज पंचभुज होते हैं।

(iii) सभी सम संख्याएँ 2 से भाज्य नहीं होती हैं।

(iv) कुछ वास्तविक संख्याएँ अपरिमेय होती हैं।

(v) सभी वास्तविक संख्याएँ परिमेय नहीं होती हैं।

3. मान लीजिए a और b वास्तविक संख्याएँ हैं, जहाँ $ab \neq 0$ है, तब बताइए कि निम्नलिखित कथनों में से कौन से सत्य हैं? अपने उत्तर का औचित्य भी दीजिए।

(i) a और b दोनों अनिवार्यतः शून्य होने चाहिए।

(ii) a और b दोनों शून्येतर होने चाहिए।

(iii) या तो a या b शून्येतर होना चाहिए।

4. उपयुक्त प्रतिबंधों के साथ निम्नलिखित कथनों का ऐसा पुनःकथन दीजिए जिससे कि वे सत्य हो जाएँ।

(i) यदि $a^2 > b^2$, तो $a > b$

(ii) यदि $x^2 = y^2$, तो $x = y$

(iii) यदि $(x + y)^2 = x^2 + y^2$, तो $x = 0$

(iv) चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

A1.3 निगमनिक तर्कण

कक्षा IX में, आपको निगमनिक तर्कण की संकल्पना से परिचित कराया गया था। यहाँ हम अनेक उदाहरणों द्वारा यह स्पष्ट करेंगे कि किस प्रकार निगमनिक तर्कण के प्रयोग से, सत्य माने गए प्रदत्त कथनों से निष्कर्ष निकालते हैं। इन कथनों को परिकल्पनाएँ या आधार वाक्य (Hypotheses or Premises) कहते हैं। अब हम कुछ उदाहरणों से प्रारंभ करेंगे।

उदाहरण 5 : दिया हुआ है कि बीजापुर कर्नाटक राज्य में है, और मान लीजिए कि शबाना बीजापुर में रहती है। किस राज्य में शबाना रहती है?

हल : यहाँ दो परिकल्पनाएँ हैं :

(i) बीजापुर कर्नाटक राज्य में है। (ii) शबाना बीजापुर में रहती है।

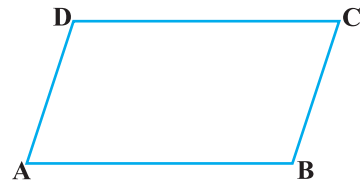
इन परिकल्पनाओं से हम यह निगमित करते हैं कि शबाना कर्नाटक राज्य में रहती है।

उदाहरण 6 : दिया हुआ है कि गणित की सभी पाठ्य-पुस्तकें रोचक होती हैं और मान लीजिए आप गणित की एक पाठ्य-पुस्तक पढ़ रहे हैं। जो पाठ्य-पुस्तक आप पढ़ रहे हैं उसके बारे में हम क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

हल : दो परिकल्पनाओं का प्रयोग करके हम यह निगमित कर सकते हैं कि आप एक रोचक पाठ्य-पुस्तक पढ़ रहे हैं।

उदाहरण 7 : $y = -6x + 5$ दिया हुआ है और मान लीजिए कि $x = 3$ है, y का मान क्या है?

हल : दोनों परिकल्पनाओं से हमें $y = -6(3) + 5 = -13$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 8 : दिया हुआ है कि ABCD एक समांतर चतुर्भुज है और मान लीजिए कि AD = 5 cm, AB = 7 cm (आकृति A1.1 देखिए)। DC और BC की लंबाइयों के बारे में आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

आकृति A1.1

हल : हमें यह दिया हुआ है कि ABCD एक समांतरचतुर्भुज है अतः हम यह निगमित कर लेते हैं कि वे सभी गुणधर्म जो एक समांतरचतुर्भुज के होते हैं, ABCD के भी हैं। इसलिए विशेष रूप से यह गुणधर्म कि 'एक समांतरचतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ' एक-दूसरे के बराबर होती हैं, ABCD पर भी लागू होता है। क्योंकि हम जानते हैं कि AD = 5 cm, इसलिए हम यह निगमित कर सकते हैं कि BC = 5 cm है। इसी प्रकार हम यह निगमित कर सकते हैं कि DC = 7 cm

टिप्पणी : इस उदाहरण में हम देखते हैं कि किस प्रकार एक दी हुई परिकल्पना में छिपे गुणधर्मों को ज्ञात करने और लागू करने की आवश्यकता प्राय: पड़ती रहती है।

उदाहरण 9 : दिया हुआ है कि सभी अभाज्य संख्याओं p के लिए $\sqrt{p}$ अपरिमेय है और मान लीजिए कि 19423 एक अभाज्य संख्या है। $\sqrt{19423}$ के संबंध में आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

हल : हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $\sqrt{19423}$ अपरिमेय है।

ऊपर के उदाहरणों में इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि हम यह नहीं जानते कि परिकल्पनाएँ सत्य हैं या नहीं। हम यह मानकर चलते हैं कि वे सत्य हैं, और तब निगमनिक तर्कण का प्रयोग करते हैं। दृष्टांतत: उदाहरण 9 में हमने इस बात की जाँच नहीं की है कि 19423 अभाज्य संख्या है या नहीं। अपने तर्क के लिए हम इसे अभाज्य संख्या मान लेते हैं। इस अनुच्छेद में हम इस बात पर बल देने का प्रयास कर रहे हैं कि यदि एक विशेष कथन दिया हुआ है, तो एक निष्कर्ष पर पहुँचने के लिए हम निगमनिक तर्कण का प्रयोग किस प्रकार करते हैं। वास्तव में यहाँ इस बात का अधिक महत्त्व है कि हम तर्कण की सही प्रक्रिया का प्रयोग करें और तर्कण की यह प्रक्रिया परिकल्पनाओं की सत्यता या असत्यता पर निर्भर नहीं होती है। फिर भी, इस बात की ओर भी ध्यान देना चाहिए कि यदि हम गलत परिकल्पना से प्रारंभ करेंगे, तो हम गलत निष्कर्ष पर भी पहुँच सकते हैं।

प्रश्नावली A1.2

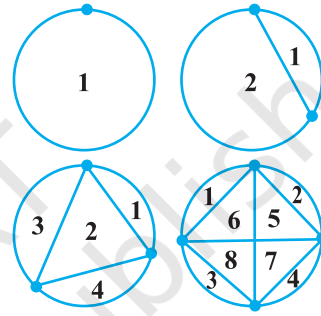
1. दिया हुआ है कि सभी महिलाएँ नश्वर हैं और मान लीजिए A एक महिला है। A के बारे में हम क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?
2. दिया हुआ है कि दो परिमेय संख्या का गुणनफल परिमेय है और मान लीजिए a और b परिमेय हैं तब ab के बारे में आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?
3. दिया हुआ है कि अपरिमेय संख्याओं का दशमलव प्रसार अनवसानी (non-terminating) और अनावर्ती (non-recurring) है और $\sqrt{17}$ एक अपरिमेय संख्या है। $\sqrt{17}$ के दशमलव प्रसार के बारे में हम क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?
4. दिया हुआ है कि $y = x^2 + 6$ और $x = -1$ तब y के मान के बारे में हम क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?
5. दिया हुआ है कि ABCD एक समांतर चतुर्भुज है और $\angle B = 80°$ तब समांतर चतुर्भुज के अन्य कोणों के बारे में आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

6. दिया हुआ है कि PQRS एक चक्रीय चतुर्भुज है और इसके विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं। चतुर्भुज के बारे में आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

7. दिया हुआ है कि सभी अभाज्य संख्या p के लिए $\sqrt{p}$ अपरिमेय है और यह भी मान लीजिए कि 3721 एक अभाज्य संख्या है। क्या आप यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $\sqrt{3721}$ एक अपरिमेय संख्या है? क्या आपका निष्कर्ष सही है? क्यों या क्यों नहीं?

A1.4 कंजेक्चर (conjectures), प्रमेय, उपपत्तियाँ और गणितीय तर्कण

आकृति A1.2 पर विचार कीजिए। पहले वृत्त पर एक बिंदु है, दूसरे वृत्त पर दो बिंदु हैं, तीसरे पर तीन, इत्यादि। प्रत्येक स्थिति में बिंदुओं को मिलाने वाली सभी संभव रेखाएँ खींची गई हैं।

रेखाएँ वृत्त को परस्पर अपवर्जी क्षेत्रों (जिनमें कोई उभयनिष्ठ भाग नहीं होता है) में विभाजित करती हैं। हम इन्हें गिन सकते हैं और अपने परिणामों को सारणीबद्ध करते हैं। जैसा नीचे दर्शाया गया है:

आकृति A1.2

बिंदुओं की संख्या	प्रदेशों की संख्या
1	1
2	2
3	4
4	8
5	
6	
7	

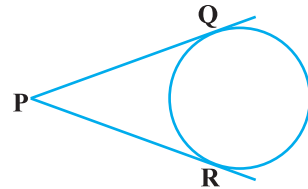
आप में से कुछ लोग उस सूत्र को प्राप्त कर सके होंगे जिसके प्रयोग से बिंदुओं की संख्या ज्ञात होने पर क्षेत्रों की संख्या की प्रागुक्ति कर सकते हैं। आप स्मरण कर सकते हैं कि कक्षा IX में, इस प्रकार के बुद्धिमत्ता पूर्ण अनुमान को 'कंजेक्चर' कहा गया है।

मान लीजिए आपका कंजेक्चर यह है कि यदि वृत्त पर 'n' बिंदु दिए हुए हैं, तो इन बिंदुओं को समस्त संभव रेखाओं से मिलाने पर 2^{n-1} परस्पर अपवर्जी क्षेत्र बनते हैं। यह एक तर्कसंगत अनुमान लगता है। यह देखा जा सकता है कि यदि $n = 5$, तो हमें 16 क्षेत्र प्राप्त होते हैं। अत: 5 बिंदुओं के लिए इस सूत्र को सत्यापित कर लेने के बाद क्या आप संतुष्ट हैं कि किन्हीं भी n बिंदुओं के लिए 2^{n-1} क्षेत्र होते हैं? यदि ऐसा है, तो यदि कोई व्यक्ति आपसे यह पूछे कि आप $n = 25$ के लिए इसे कैसे सुनिश्चित कर सकते हैं, तो आपकी प्रतिक्रिया क्या होगी? ऐसे प्रश्नों का उत्तर प्राप्त करने के लिए आपको एक ऐसी उपपत्ति की आवश्यकता होती है जो निस्संदेह यह प्रदर्शित करती हो कि यह परिणाम सत्य है या यह प्रदर्शित करने के लिए कि कुछ 'n' के लिए यह परिणाम असफल हो जाता है, एक प्रत्युदाहरण होना चाहिए। वास्तव में, यदि आपमें धैर्य है और $n = 6$ पर इसे ज्ञात करने का प्रयास करें तो पाएँगे कि $n = 6$ पर 31 क्षेत्र होते हैं और $n = 7$ पर 57 क्षेत्र होते हैं। अत: ऊपर के कंजेक्चर का $n = 6$ एक प्रत्युदाहरण है। यह तथ्य प्रत्युदाहरण की शक्ति को प्रदर्शित करता है। आपको याद होगा कि कक्षा IX में इस बात पर चर्चा की गई है कि किसी **कथन को असत्य सिद्ध करने के लिए एक ही प्रत्युदाहरण पर्याप्त होता है।**

इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि $n = 1, 2, 3, 4$ और 5 पर परिणाम का सत्यापन करने के बाद भी हमने क्षेत्रों की संख्या से संबंधित उपपत्ति की आवश्यकता पर बल दिया है। आइए हम कुछ और उदाहरण लें। आप (अध्याय 5 में दिए गए) निम्नलिखित परिणाम से अवश्य परिचित होंगे: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ इसकी मान्यता को स्थापित करने के लिए $n = 1, 2, 3,$ आदि के लिए परिणाम को सत्यापित कर देना ही पर्याप्त नहीं होता है, क्योंकि कुछ ऐसे भी 'n' हो सकते हैं, जिसके लिए यह परिणाम सत्य न हो (जैसा कि ऊपर के उदाहरण में $n = 6$ पर परिणाम असफल हो जाता है)। अत: हमें एक ऐसी उपपत्ति की आवश्यकता होती है जो इसकी सत्यता निस्संदेह स्थापित करे। उच्च कक्षाओं में आप इसकी उपपत्ति के बारे में अध्ययन करेंगे।

अब, आकृति A1.3 पर विचार कीजिए, जहाँ PQ और PR बिंदु P से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ हैं।

आप (प्रमेय 10.2 में) यह सिद्ध कर चुके हैं कि PQ = PR है। आप इस प्रकार की अनेक आकृतियाँ खींच कर और संगत स्पर्श रेखाओं की मापी गई लंबाइयों द्वारा प्रत्येक स्थिति में इस परिणाम को केवल सत्यापित करके आप संतुष्ट नहीं हुए थे।

Q
P
R

आकृति A1.3

क्या आपको याद है कि उपपत्ति में क्या-क्या था? यह कथनों (जिन्हें मान्य तर्क कहते हैं) के एक अनुक्रम से मिल कर बना था, जिसमें प्रत्येक कथन, उपपत्ति में आपूर्व कथनों से या प्रमाणित किए जाने वाले परिणाम से स्वतंत्र पहले सिद्ध किए जा चुके परिणामों से या अभिगृहीतों से या परिभाषाओं से या आपके द्वारा की गई कल्पनाओं से प्राप्त होता है और आप अपनी उपपत्ति को कथन $PQ = PR$ से समाप्त करते हैं अर्थात् उस कथन से जिसे आप सिद्ध करना चाहते थे।

उपपत्ति की रचना करने की यही विधि होती है।

अब हम कुछ उदाहरणों और प्रमेयों पर विचार करेंगे और उनकी उपपत्तियों का विश्लेषण करेंगे जिससे हमें यह अधिक अच्छी तरह समझने में सहायता मिलेगी कि इनकी रचना किस प्रकार की जाती है।

सबसे पहले हम उपपत्ति की तथाकथित 'प्रत्यक्ष' या 'निगमनिक' विधि के प्रयोग से प्रारंभ करेंगे। इस विधि में हम अनेक कथन प्रस्तुत करते हैं। **प्रत्येक कथन पिछले कथनों पर आधारित होता है।** यदि प्रत्येक कथन तार्किक रूप से सही है (अर्थात् एक मान्य तर्क है), तो इससे सही निष्कर्ष प्राप्त होता है।

उदाहरण 10 : दो परिमेय संख्याओं का योगफल एक परिमेय संख्या होती है।

हल :

क्र.सं.	कथन	विश्लेषण/टिप्पणी
1.	मान लीजिए x और y परिमेय संख्याएँ हैं।	क्योंकि परिणाम परिमेय संख्याओं के बारे में है, इसीलिए हम x और y से प्रारंभ करते हैं जो कि परिमेय है।
2.	मान लीजिए $x = \frac{m}{n}$, $n \neq 0$ और $y = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$ जहाँ m, n, p और q पूर्णांक हैं।	परिमेय संख्याओं की परिभाषा प्रयुक्त करें।
3.	अत: $x + y = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}$	क्योंकि परिणाम परिमेय संख्याओं के योगफल के बारे में है, इसलिए हम $x + y$ लेते हैं।

4.	पूर्णांकों के गुणधर्मों को लागू करने पर हम देखते हैं कि $mq + np$ और nq पूर्णांक हैं।	पूर्णांकों के ज्ञात गुणधर्मों के प्रयोग करने पर।
5.	क्योंकि $n \neq 0$ और $q \neq 0$, इसलिए $nq \neq 0$.	पूर्णांकों के ज्ञात गुणधर्मों का प्रयोग करके।
6.	अतः, $x + y = \frac{mq + np}{nq}$ एक परिमेय संख्या है।	परिमेय संख्या की परिभाषा का प्रयोग करके।

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि ऊपर की उपपत्ति का प्रत्येक कथन पहले से स्थापित किए गए तथ्य या परिभाषा पर आधारित है।

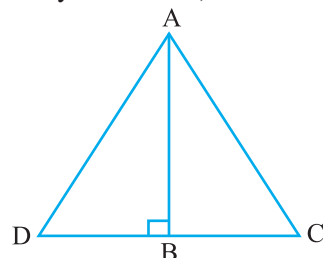
उदाहरण 11 : 3 से बड़ी प्रत्येक अभाज्य संख्या $6k + 1$ या $6k + 5$ के रूप की होती है, जहाँ k एक पूर्णांक है।

हल :

क्र.सं.	कथन	विश्लेषण/टिप्पणी
1.	मान लीजिए p, 3 से बड़ी एक अभाज्य संख्या है।	क्योंकि परिणाम का संबंध 3 से बड़ी एक अभाज्य संख्या से है, इसलिए सबसे पहले हम इस प्रकार की संख्या से प्रारंभ करते हैं।
2.	p को 6 से भाग देने पर हम यह देखते हैं कि p का रूप $6k$, $6k + 1$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$, या $6k + 5$ हो सकता है, जहाँ k एक पूर्णांक है।	यूक्लिड की विभाजन-प्रमेयिका का प्रयोग करने पर
3.	परंतु $6k = 2(3k)$, $6k + 2 = 2(3k + 1)$, $6k + 4 = 2(3k + 2)$ और $6k + 3 = 3(2k + 1)$ अतः ये अभाज्य संख्याएँ नहीं है।	अब हम शेषफलों का विश्लेषण करेंगे जबकि p एक अभाज्य संख्या हो।
4.	अतः p को अनिवार्यतः $6k + 1$ या $6k + 5$ के रूप का होना होगा, जहाँ k एक पूर्णांक है।	अन्य विकल्पों का निराकरण करने के बाद हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं।

टिप्पणी : ऊपर के उदाहरण में विभिन्न विकल्पों का निराकरण कर लेने के बाद हम निष्कर्ष पर पहुँचते हैं। इस विधि को कभी-कभी निःशेषण द्वारा उपपत्ति (proof by exhaustion) कहा जाता है।

प्रमेय A1.1 (*पाइथागोरस-प्रमेय का विलोम*): *यदि एक त्रिभुज की एक भुजा की लंबाई का वर्ग अन्य दो भुजाओं की लंबाइयों के वर्गों के योगफल के बराबर हो, तो पहली भुजा का सम्मुख कोण समकोण होता है।*

A D B C

आकृति A1.4

उपपत्ति :

क्र.सं.	कथन	विश्लेषण
1.	मान लीजिए ΔABC परिकल्पना $AC^2 = AB^2 + BC^2$ को संतुष्ट करती है।	क्योंकि हम इस प्रकार के त्रिभुज से संबंधित कथन को सिद्ध कर रहे हैं, इसलिए हम इसी को लेकर प्रारंभ करते हैं।
2.	AB पर लंब रेखा BD की रचना कीजिए इस प्रकार कि $BD = BC$ हो और A को D से मिलाइए।	यह वह अंर्तज्ञान वाला चरण है, जिसके बारे में हम कह चुके हैं कि इसकी आवश्यकता हमें प्रमेयों को सिद्ध करने में प्राय: होगी।
3.	रचना के अनुसार ΔABD एक समकोण त्रिभुज है, और पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार $AD^2 = AB^2 + BD^2$	हम पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग करते हैं जिसे पहले सिद्ध किया जा चुका है।
4.	रचना के अनुसार $BD = BC$ है। अत: $AD^2 = AB^2 + BC^2$.	तर्कसंगत निगमन
5.	अत: $AC^2 = AB^2 + BC^2 = AD^2$	कल्पना और पिछले कथन को लागू करने पर
6.	क्योंकि AC और AD धनात्मक है, इसलिए $AC = AD$	संख्याओं के ज्ञात गुणधर्म को लागू करने पर

7.	अभी ही हमने यह दर्शाया है कि AC = AD और रचना के अनुसार BC = BD और AB उभयनिष्ठ है। अत: SSS के अनुसार $\Delta ABC \cong \Delta ABD$	ज्ञात प्रमेय लागू करने पर
8.	क्योंकि $\Delta ABC \cong \Delta ABD$, इसलिए $\angle ABC = \angle ABD$ जो कि एक समकोण है	पहले स्थापित तथ्य के आधार पर तर्कसंगत निगमन ■

टिप्पणी : ऊपर दिए गए प्रत्येक परिणाम को एक-दूसरे से शृंखलित चरणों के अनुक्रम से सिद्ध किया गया है। इनके क्रम का महत्त्व है। उपपत्ति का प्रत्येक चरण पिछले चरणों और पहले ज्ञात किए गए परिणामों से प्राप्त होता है (प्रमेय 6.9 भी देखिए)।

प्रश्नावली A1.3

नीचे दिए गए प्रत्येक प्रश्न में आपको एक कथन सिद्ध करने के लिए कहा गया है। प्रत्येक उपपत्ति में प्रयोग किए गए सभी चरण बताइए और प्रत्येक चरण के लिए कारण बताइए।

1. सिद्ध कीजिए कि दो क्रमागत विषम संख्याओं का योगफल, 4 से भाज्य होता है।

2. दो क्रमागत विषम संख्याएँ लीजिए। उनके वर्गों का योगफल ज्ञात कीजिए और तब प्राप्त परिणाम में 6 जोड़ दीजिए। सिद्ध कीजिए कि इस तरह प्राप्त की गई नई संख्या सदा ही 8 से भाज्य होती है।

3. यदि $p \geq 5$ एक अभाज्य संख्या हो तो दिखाइए कि $p^2 + 2$, संख्या 3 से भाज्य है।
[**संकेत:** उदाहरण 11 का प्रयोग कीजिए।]

4. मान लीजिए x और y परिमेय संख्याएँ हैं। दिखाइए कि xy एक परिमेय संख्या है।

5. यदि a और b धन पूर्णांक हों, तो आप जानते हैं कि $a = bq + r, 0 \leq r < b$, जहाँ q एक पूर्ण संख्या है। सिद्ध कीजिए HCF (a, b) = HCF (b, r)
[**संकेत :** मान लीजिए HCF$(b, r) = h$ है। अत: $b = k_1h$ और $r = k_2h$, जहाँ k_1 और k_2 असहभाज्य (co-prime) हैं।]

6. त्रिभुज ABC की भुजा BC की एक समांतर रेखा भुजाओं AB और AC को क्रमश: D और E पर काटती है। सिद्ध कीजिए कि $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

A1.5 कथन का निषेध (Negation)

इस भाग में हम इस बात पर चर्चा करेंगे कि किसी कथन का 'निषेध' करने का क्या अर्थ है, परंतु चर्चा प्रारंभ करने से पहले हम आपको कुछ संकेतन से परिचित करा देना चाहते

हैं, जिनकी सहायता से हम इन संकल्पनाओं को सरलता से समझ सकते हैं। आइए सबसे पहले हम एक कथन को एक एकल इकाई के रूप में लें और उसे एक नाम दे दें। उदाहरण के लिए हम कथन '1 सितंबर, 2005 को दिल्ली में वर्षा हुई थी' को p से प्रकट कर सकते हैं। इसे हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं

p: 1 सितंबर, 2005 को दिल्ली में वर्षा हुई थी।

इसी प्रकार आइए हम यह भी लिख लें।

q: सभी अध्यापक महिलाएँ हैं।

r: माइक के कुत्ते की पूँछ काली है।

s: $2 + 2 = 4$.

t: त्रिभुज ABC समबाहु त्रिभुज है।

यह संकेतन हमें कथनों के गुणधर्मों के बारे में चर्चा करने में सहायता करती है और इस बात में भी सहायता करती है कि हम उन्हें किस प्रकार संयोजित कर सकते हैं। प्रारंभ में उन कथनों का अध्ययन करेंगे, जिन्हें हम 'सरल' कथन कहते हैं और तदुपरांत 'मिश्र' कथनों का अध्ययन करेंगे।

आइए अब हम निम्नलिखित सारणी पर विचार करें जिसमें हम दिए हुए प्रत्येक कथन से एक नया कथन की रचना करेंगे।

मूल कथन	**नया कथन**
p: 1 सितंबर 2005 को दिल्ली में वर्षा हुई थी।	$\sim p$: यह असत्य है कि 1 सितंबर, 2005 को दिल्ली में वर्षा हुई थी।
q: सभी अध्यापक महिला हैं।	$\sim q$: यह असत्य है कि सभी अध्यापक महिला हैं।
r: माइक के कुत्ते की पूँछ काली है।	$\sim r$: यह असत्य है कि माइक के कुत्ते की पूँछ काली है।
s: $2 + 2 = 4$	$\sim s$: यह असत्य है कि $2 + 2 = 4$
t: त्रिभुज ABC समबाहु है।	$\sim t$: यह असत्य है कि त्रिभुज ABC समबाहु है।

सारणी में दिया गया प्रत्येक नया कथन संगत पुराने कथन का *निषेध* (negation) है। अर्थात् $\sim p$, $\sim q$, $\sim r$, $\sim s$ और $\sim t$ क्रमशः कथनों p, q, r, s और t के निषेध हैं। यहाँ $\sim p$ को

'नहीं p' (not p) पढ़ा जाता है। कथन $\sim p$, उस निश्चयात्मक कथन (assertion) का निषेध करता है जिसे कथन p कहता है। ध्यान दीजिए कि अपनी सामान्य बातचीत में $\sim p$ का अर्थ यह है कि '1 सितंबर, 2005 को दिल्ली में वर्षा नहीं हुई थी।' फिर भी, ऐसा करते समय हमें सावधानी बरतने की आवश्यकता होती है। आप संभवत: यह सोच सकते हैं कि दिए हुए कथन में किसी उपयुक्त स्थान पर केवल शब्द 'नहीं' लगा देने से ही कथन का निषेध प्राप्त किया जा सकता है। यद्यपि यह क्रिया 'p' के संबंध में तो लागू हो जाती है, परंतु कठिनाई तब होती है जबकि हमारा कथन शब्द 'सभी' से प्रारंभ होता है। उदाहरण के लिए कथन q: सभी अध्यापक महिला हैं पर विचार कीजिए। हमने यह कहा है कि इस कथन का निषेध $\sim q$: यह असत्य है कि सभी अध्यापक महिला होती हैं। यह इस कथन के ही समान है कि 'कुछ अध्यापक ऐसे हैं जो पुरुष हैं।' आइए अब यह देखें कि जब हम q में केवल 'नहीं' लगा देते हैं तब क्या होता है। तब हमें यह कथन प्राप्त होता है कि "सभी अध्यापक महिला नहीं हैं" या हम यह कथन प्राप्त कर सकते हैं कि "नहीं हैं सभी अध्यापक महिला"। पहले कथन से लोग भ्रम में पड़ सकते हैं, इससे यह अर्थ निकलता है कि सभी अध्यापक पुरुष हैं (यदि हम शब्द 'सभी' पर बल देते हैं)। यह निश्चय ही q का निषेध नहीं है। तथापि दूसरे कथन से $\sim q$ का अर्थ प्राप्त हो जाता है अर्थात् कम से कम एक अध्यापक ऐसा है जो महिला नहीं है। अत: किसी कथन का निषेध लिखते समय सावधानी बरतने की आवश्यकता होती है।

अब, हम इस बात का निर्णय कैसे करें कि जो निषेध हमने प्राप्त किया है वह सही है या नहीं? इसके लिए हम निम्नलिखित कसौटी का प्रयोग करते हैं।

मान लीजिए p एक कथन है और $\sim p$ इसका निषेध है। तब $\sim p$ असत्य होता है जब कभी p सत्य होता है और $\sim p$ सत्य होता है जब कभी p असत्य होता है।

उदाहरण के लिए, यदि यह सत्य है कि माइक के कुत्ते की पूँछ काली है, तो यह असत्य है कि माइक के कुत्ते की पूँछ काली नहीं है। यदि यह असत्य है कि माइक के कुत्ते की पूँछ काली है, तो यह सत्य है कि माइक के कुत्ते की पूँछ काली नहीं है।

इसी प्रकार कथनों s और t के निषेध ये हैं:

$s: 2 + 2 = 4$; निषेध $\sim s: 2 + 2 \neq 4$

t: त्रिभुज ABC समबाहु है, $\sim t$: त्रिभुज ABC समबाहु नहीं है।

अब, $\sim(\sim s)$ क्या है? यह $2 + 2 = 4$ होगा जो कि s है और $\sim(\sim t)$ क्या है? यह त्रिभुज ABC समबाहु है' अर्थात् t होगा। वस्तुत: यदि कोई कथन $\boldsymbol{p}$ हो, तो $\boldsymbol{\sim(\sim p)}$ स्वयं कथन $\boldsymbol{p}$ होता है।

उदाहरण 12 : निम्नलिखित कथनों के निषेध बताइए:

(i) माइक के कुत्ते की पूँछ काली नहीं है।

(ii) सभी अपरिमेय संख्याएँ वास्तविक संख्याएँ होती हैं।

(iii) $\sqrt{2}$ अपरिमेय है।

(iv) कुछ परिमेय संख्याएँ पूर्णांक होती हैं।

(v) सभी अध्यापक पुरुष नहीं हैं।

(vi) कुछ घोड़े भूरे नहीं हैं।

(vii) ऐसी कोई वास्तविक संख्या x नहीं है जिससे कि $x^2 = -1$

हल :

(i) यह असत्य है कि माइक के कुत्ते की पूँछ काली नहीं है अर्थात् माइक के कुत्ते की पूँछ काली है।

(ii) यह असत्य है कि सभी अपरिमेय संख्याएँ वास्तविक संख्याएँ हैं अर्थात् कुछ (कम से कम एक) अपरिमेय संख्याएँ वास्तविक संख्याएँ नहीं हैं। इसे इस प्रकार भी लिखा जा सकता है 'सभी अपरिमेय संख्याएँ वास्तविक संख्याएँ नहीं हैं।'

(iii) यह असत्य है कि $\sqrt{2}$ अपरिमेय है अर्थात् $\sqrt{2}$ अपरिमेय नहीं है।

(iv) यह असत्य है कि कुछ परिमेय संख्याएँ पूर्णांक होती हैं अर्थात् कोई भी परिमेय संख्या पूर्णांक नहीं है।

(v) यह असत्य है कि सभी अध्यापक पुरुष नहीं हैं अर्थात् सभी अध्यापक पुरुष हैं।

(vi) यह असत्य है कि कुछ घोड़े भूरे नहीं है अर्थात् सभी घोड़े भूरे हैं।

(vii) यह असत्य है कि ऐसी कोई वास्तविक संख्या x नहीं है जिससे कि $x^2 = -1$ अर्थात् कम से कम एक वास्तविक संख्या x है जिससे कि $x^2 = -1$

टिप्पणी : ऊपर की चर्चा से किसी कथन का निषेध प्राप्त करने का निम्नलिखित **कार्यकारी नियम** (working rule) प्राप्त कर सकते हैं:

(i) पहले 'नहीं' के साथ कथन लिखिए।

(ii) यदि कोई भ्रम हो, तो आप कुछ उपयुक्त संशोधन (modification) कर सकते हैं, विशेष रूप से 'सभी' या 'कुछ' से संबंधित कथनों में।

प्रश्नावली A1.4

1. निम्नलिखित कथनों के निषेध लिखिए:

(i) मनुष्य नश्वर (mortal) है।

(ii) रेखा l रेखा m के समांतर है।

(iii) इस अध्याय में अनेक प्रश्नावलियाँ हैं।

(iv) सभी पूर्णांक परिमेय संख्या है।

(v) कुछ अभाज्य संख्याएँ विषम है।

(vi) कोई छात्र आलसी नहीं है।

(vii) कुछ बिल्लियाँ काली नहीं है।

(viii) ऐसी कोई संख्या x नहीं है जिससे कि $\sqrt{x} = -1$

(ix) संख्या 2, धन पूर्णांक a को विभाजित करती है।

(x) पूर्णांक a और b असहभाज्य है।

2. नीचे दिए गए प्रत्येक प्रश्न में दो कथन हैं। बताइए कि दूसरा कथन पहले कथन का निषेध है या नहीं

(i) मुमताज भूखी है,
मुमताज भूखी नहीं है।

(ii) कुछ बिल्लियाँ काली हैं,
कुछ बिल्लियाँ भूरी हैं।

(iii) सभी हाथी विशाल हैं।
एक हाथी विशाल नहीं है।

(iv) सभी अग्निशामक यंत्र लाल हैं।
सभी अग्निशामक यंत्र लाल नहीं हैं।

(v) कोई आदमी गाय नहीं है।
कुछ आदमी गाय हैं।

A1.6 कथन का विलोम

अब हम एक कथन के विलोम की अभिधारणा (notion) का पता लगाएँगे। इसके लिए हमें 'मिश्र (compound)' कथन की अर्थात् एक ऐसे कथन की आवश्यकता होती है जो एक या अधिक 'सरल' कथनों का संयोजन होता है। ऐसे तो मिश्र कथन बनाने की अनेक विधियाँ हैं, परंतु यहाँ हम उन विधियों पर ध्यान केंद्रित करेंगे जो शब्दों 'यदि' और 'तो' के प्रयोग द्वारा दो सरल कथनों को जोड़कर प्राप्त किए जाते हैं। उदाहरण के लिए कथन

कथन 'यदि वर्षा हो रही है, तो साइकिल से जाना कठिन है' निम्नलिखित दो कथनों से बना है।

p: वर्षा हो रही है।

q: साइकिल से जाना कठिन।

पूर्व में बताए गए संकेतन का प्रयोग करके हम यह कह सकते हैं: यदि p, तो q है। हम यह भी कह सकते हैं कि 'p से तात्पर्य q प्राप्त होता है'। और इसे हम $p \Rightarrow q$ से प्रकट करते हैं।

अब, मान लीजिए कि कथन यह है कि 'यदि पानी की टंकी काली है, तो इसमें पीने का पानी है।' यह $p \Rightarrow q$ के रूप का है जहाँ परिकल्पना p है (पानी की टंकी काली है) और निष्कर्ष q है (टंकी में पीने का पानी है)। मान लीजिए हम परिकल्पना और निष्कर्ष का

विनिमय (Interchange) कर दें, तब ऐसी स्थिति में हमें क्या प्राप्त होता है? हमें $q \Rightarrow p$ प्राप्त होता है अर्थात् यदि टंकी में पीने वाला पानी है, तो टंकी अवश्य काली होगी। इस कथन को कथन $p \Rightarrow q$ का **विलोम** (converse) कहते हैं।

व्यापक रूप में कथन $p \Rightarrow q$ का **विलोम** $q \Rightarrow p$ होता है जहाँ p और q कथन हैं। ध्यान दीजिए कि $p \Rightarrow q$ और $q \Rightarrow p$ एक-दूसरे के विलोम हैं।

उदाहरण 13 : निम्नलिखित कथनों के विलोम लिखिए:

(i) यदि जमीला साइकिल चला रही है, तो 17 अगस्त रविवार को पड़ता है।

(ii) यदि 17 अगस्त रविवार है, तो जमीला साइकिल चला रही है।

(iii) यदि पौलिने क्रोधित होती है, तो उसका चेहरा लाल हो जाता है।

(iv) यदि एक व्यक्ति के पास शिक्षा में स्नातक की डिग्री है, तो उसे शिक्षण की अनुमति होती है।

(v) यदि एक व्यक्ति को वायरल संक्रमण है, तो उसे तेज बुखार होता है।

(vi) यदि अहमद मुंबई में है, तो वह भारत में है।

(vii) यदि त्रिभुज ABC समबाहु है, तो उसके सभी अंत:कोण बराबर होते हैं।

(viii) यदि x एक अपरिमेय संख्या है, तो x का दशमलव प्रसार अनवसानी (non-terminating) अनावर्ती (non-recurring) होता है।

(ix) यदि $x - a$ बहुपद $p(x)$ का एक गुणनखंड है, तो $p(a) = 0$.

हल : ऊपर दिया गया प्रत्येक कथन $p \Rightarrow q$ के रूप का है। अत: विलोम ज्ञात करने के लिए पहले हम p और q को पहचानते हैं और तब $q \Rightarrow p$ लिखते हैं।

(i) p: जमीला साइकिल चला रही है और q: 17 अगस्त रविवार को पड़ता है। अत: विलोम यह है यदि 17 अगस्त रविवार को पड़ता है, तो जमीला साइकिल चला रही है।

(ii) यह (i) का विलोम है। अत: इसका विलोम ऊपर (i) में दिया गया कथन है।

(iii) यदि पौलीन का चेहरा लाल हो जाता है, तो वह क्रोधित है।

(iv) यदि एक व्यक्ति को पढ़ाने की अनुमति है, तो उसके पास शिक्षा में स्नातक की डिग्री है।

(v) यदि एक व्यक्ति को तेज बुखार है तो, उसे वायरल संक्रमण है।

(vi) यदि अहमद भारत में है, तो वह मुंबई में है।

(vii) यदि त्रिभुज ABC के सभी अंत:कोण बराबर हैं, तो वह समबाहु त्रिभुज है।

(viii) यदि x का दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती है, तो x एक परिमेय संख्या है।

(ix) यदि $p(a) = 0$, तो $x - a$ बहुपद $p(x)$ का एक गुणनखंड है।

ध्यान दीजिए कि इस बात की चिंता किए बिना कि कथन सत्य है या असत्य, हमने ऊपर दिए गए प्रत्येक कथन का केवल विलोम लिख दिया है। उदाहरण के लिए निम्नलिखित कथन पर विचार कीजिए। यदि अहमद मुंबई में है, तो वह भारत में है। यह कथन सत्य है। आइए अब हम इसका विलोम लें। यदि अहमद भारत में है, तो वह मुंबई में है। यह आवश्यक नहीं है कि यह सदा सत्य ही हो–वह भारत के किसी भी भाग में हो सकता है।

गणित में, विशेष रूप से ज्यामिति में आपको ऐसी अनेक स्थितियाँ मिलती हैं, जहाँ $p \Rightarrow q$ सत्य होता है और आपको यह निर्णय लेना होता है कि क्या विलोम अर्थात् $q \Rightarrow p$ भी सत्य है।

उदाहरण 14 : निम्नलिखित कथनों के विलोम बताइए। प्रत्येक स्थिति में यह भी निर्णय लीजिए कि विलोम सत्य है या असत्य।

(i) यदि n एक सम पूर्णांक है, तो $2n + 1$ एक विषम पूर्णांक होता है।

(ii) यदि एक वास्तविक संख्या का दशमलव–प्रसार सांत (terminating) है, तो संख्या परिमेय है।

(iii) यदि एक तिर्यक् छेदी रेखा (transversal) दो समांतर रेखाओं को काटती है, तो संगत कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर होता है।

(iv) यदि एक चतुर्भुज की सम्मुख–भुजाओं का प्रत्येक युग्म बराबर हो, तो चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होता है।

(v) यदि दो त्रिभुज सर्वांगसम है, तो उनके संगत कोण बराबर होते हैं।

हल :

(i) विलोम यह है कि 'यदि $2n + 1$ एक विषम पूर्णांक है, तो n एक सम पूर्णांक होता है।' यह एक असत्य कथन है (उदाहरण के लिए $15 = 2(7) + 1$, और 7 विषम है।)

(ii) 'यदि एक वास्तविक संख्या परिमेय है, तो इसका दशमलव प्रसार सांत होता है।' यह विलोम है। यह एक असत्य कथन है। क्योंकि परिमेय संख्या का एक अनवसानी आवर्ती दशमलव प्रसार भी हो सकता है।

(iii) विलोम यह है कि 'यदि एक तिर्यक छेदी रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार काटती हो कि संगत कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर हो, तो दोनों रेखाएँ समांतर होती हैं'। कक्षा IX की पाठ्यपुस्तक के अभिगृहीत 6.4 के अनुसार हमने यह मान लिया है कि यह कथन सत्य है।

(iv) 'यदि एक चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज हो, तो इसके सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म बराबर होता है।' यह विलोम है। यह सत्य है (प्रमेय 8.1, कक्षा IX)।

(v) 'यदि दो त्रिभुजों के संगत कोण बराबर हों, तो वे सर्वांगसम होते हैं' विलोम है। यह कथन असत्य है। यह हम आप पर छोड़ रहे हैं कि आप इनके लिए एक उपयुक्त प्रत्युदाहरण ज्ञात करें।

प्रश्नावली A1.5

1. निम्नलिखित कथनों के विलोम लिखिए

(i) यदि टोकियो में गर्मी हो, तो शरन के शरीर से अधिक पसीना निकलने लगता है।

(ii) यदि शालिनी भूखी हो, तो उसका पेट कुड़कुड़ाने लगता है।

(iii) यदि यशवंत को छात्र-वृत्ति मिल रही हो, तो उसे एक डिग्री मिल सकती है।

(iv) यदि पौधे में फूल लगे हुए हों, तो वह सजीव होता है।

(v) यदि जानवर एक बिल्ली है, तो इसकी एक पूँछ होती है।

2. निम्नलिखित कथनों के विलोम लिखिए। प्रत्येक स्थिति में यह बताइए कि विलोम सत्य है या असत्य

(i) यदि त्रिभुज ABC समद्विबाहु हो, तो इसके आधार कोण बराबर होते हैं।

(ii) यदि एक पूर्णांक विषम हो, तो इसका वर्ग एक विषम पूर्णांक होता है।

(iii) यदि $x^2 = 1$, तो $x = 1$

(iv) यदि ABCD एक समांतर चतुर्भुज हो, तो AC तथा BD एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

(v) यदि a, b और c पूर्ण संख्याएँ हैं, तो $a + (b + c) = (a + b) + c$

(vi) यदि x और y दो विषम संख्याएँ हैं, तो $x + y$ एक सम संख्या होती है।

(vii) यदि एक समांतर चतुर्भुज PQRS के शीर्ष बिंदु एक वृत्त पर स्थित हों, तो वह एक आयत होता है।

A1.7 विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति

अभी तक आपने सभी उदाहरणों में परिणामों की सत्यता स्थापित करने के लिए प्रत्यक्ष तर्क का प्रयोग किया था। अब हम 'परोक्ष' तर्कों विशेषरूप से 'विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति' (proof by conrtradiction) नामक गणित के एक अति शक्तिशाली साधन का पता लगाएँगे। हम इस विधि का प्रयोग अध्याय 1 में अनेक संख्याओं की अपरिमेयता स्थापित करने और अन्य अध्यायों में कुछ प्रमेयों को सिद्ध करने के लिए कर चुके हैं। यहाँ हम इस अभिधारणा को स्पष्ट करने के लिए अनेक उदाहरण लेंगे।

आगे अध्ययन करने से पहले आइए हम इस बात पर चर्चा करें कि विरोधोक्ति क्या है। गणित में विरोध तब होता है जबकि हमें एक ऐसा कथन p प्राप्त होता है कि p सत्य होता है और इसका निषेध $\sim p$ भी सत्य होता है। उदाहरण के लिए,

p: , जहाँ a और b असहभाज्य संख्याएँ हैं।

q: संख्या 2 `$a$' और `b' दोनों को विभाजित करती है।

यदि हम यह मान लें कि p सत्य है और हम यह भी दर्शा सकें कि q भी सत्य है, तो, हमें एक विरोधोक्ति प्राप्त होती है क्योंकि q का यह तात्पर्य है कि p का निषेध सत्य है। यदि आपको याद हो कि यही बात यथातथ्य तब घटी थी जब हम यह सिद्ध करने का प्रयास कर रहे थे कि $\sqrt{2}$ अपरिमेय है (देखिए अध्याय 1)।

विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति किस प्रकार कार्य करती है? आइए एक विशिष्ट उदाहरण लेकर इस पर हम विचार करें। मान लीजिए निम्नलिखित दिया हुआ है:

सभी महिलाएँ नश्वर होती हैं। A एक महिला है। सिद्ध कीजिए कि महिला A नश्वर है।

यद्यपि यह एक सरल उदाहरण है, फिर भी आइए हम देखें कि विरोधोक्ति से इसे हम कैसे सिद्ध कर सकते हैं।

- आइए हम यह मान लें कि हम कथन p की सत्यता स्थापित करना चाहते हैं (यहाँ हम यह दर्शाना चाहते हैं कि p : 'महिला A नश्वर है' सत्य है)
- अत: सबसे पहले हम यह मान लेते हैं कि कथन सत्य नहीं है अर्थात् हम यह मान लेते हैं कि p का निषेध सत्य है। (अर्थात् महिला A नश्वर नहीं है)।
- तब हम p के निषेध की सत्यता पर आधारित अनेक तर्कसंगत निगमन करते हैं। (क्योंकि 'महिला A नश्वर नहीं है' इसलिए हमें कथन 'सभी महिलाएँ नश्वर हैं' का एक प्रत्युदाहरण प्राप्त हो जाता है। अत: यह असत्य है कि सभी महिलाएँ नश्वर हैं)।
- यदि इससे विरोधोक्ति उत्पन्न होती है, तो यह विरोधोक्ति हमारी दोषपूर्ण मान्यता कि 'p सत्य नहीं है' के कारण होता है। (यह एक विरोधोक्ति है क्योंकि हमने यह दर्शाया है कि कथन 'सभी महिलाएँ नश्वर है' और इसका निषेध कि 'सभी महिलाएँ नश्वर नहीं हैं', सत्य है। यह विरोधोक्ति इसलिए होती है, क्योंकि हम यह मानकर चले थे कि A नश्वर नहीं है।)।
- अत: हमारी कल्पना गलत है अर्थात् p को सत्य होना ही है (अत: A नश्वर है)।

उदाहरण 15 : एक शून्येतर परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का गुणनफल अपरिमेय होता है।

हल :

कथन	विश्लेषण/टिप्पणी
हम विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति का प्रयोग करेंगे। मान लीजिए r एक शून्येतर परिमेय संख्या है और x एक अपरिमेय संख्या है। मान लीजिए, $r = \frac{m}{n}$ जहाँ m, n पूर्णांक है और $m \neq 0$, $n \neq 0$ हमें यह सिद्ध करना है कि rx अपरिमेय है।	
मान लीजिए rx परिमेय है।	यहाँ हम उस कथन का निषेध सत्य मान ले रहे हैं जिसे हमें सिद्ध करना है।
तब , $rx = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$, जहाँ p और q पूर्णांक है।	यह पिछले कथन और परिमेय संख्या की परिभाषा से प्राप्त होता है।
समीकरण $rx = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$, और $r = \frac{m}{n}$, का प्रयोग करने पर हमें $x = \frac{p}{rq} = \frac{np}{mq}$ प्राप्त होता है।	
क्योंकि np और mq पूर्णांक हैं और $mq \neq 0$, इसलिए x एक परिमेय संख्या है।	पूर्णांकों के गुणधर्मो और परिमेय संख्या की परिभाषा का प्रयोग करने पर
यह एक विरोधोक्ति है क्योंकि हमने x को परिमेय दिखाया है, परंतु हमारी परिकल्पना के अनुसार x अपरिमेय है।	इसी विरोधोक्ति को हम ढूँढ़ रहे थे।
विरोधोक्ति इस दोषपूर्ण कल्पना, कि rx परिमेय है के कारण होता है।	तर्कसंगत निगमन

अब हम उदाहरण 11 सिद्ध करेंगे, परंतु इस बार हम विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति का प्रयोग करेंगे। परिणाम नीचे दिया गया है।

कथन	विश्लेषण/टिप्पणी
आइए हम यह मान लें कि कथन सत्य नहीं है।	जैसाकि हम पहले देख चुके हैं कि यह विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति की सहायता से तर्क देने का प्रारंभ है।
अत: हम यह मान लेते हैं कि एक ऐसी अभाज्य संख्या $p > 3$ होती है जो $6n + 1$ या $6n + 5$ के रूप का होता है, जहाँ n एक पूर्ण संख्या है।	यह परिणाम के कथन का निषेध है।
6 के भाग पर यूक्लिड की विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करने और इस तथ्य का प्रयोग करने पर कि p, $6n + 1$ या $6n + 5$ के रूप का नहीं है, हमें $p = 6n$ या $6n + 2$ या $6n + 3$ या $6n + 4$ प्राप्त होता है।	पहले सिद्ध किए गए परिणामों का प्रयोग करने पर।
अत: p या तो 2 या 3 से भाज्य है।	तर्कसंगत निगमन
इसलिए, p अभाज्य नहीं है।	तर्कसंगत निगमन
यह एक विरोधोक्ति है, क्योंकि हमारी परिकल्पना के अनुसार p अभाज्य है।	तथ्यत: हम यही चाहते हैं
विरोधोक्ति इसलिए होती है क्योंकि हम यह मानकर चले थे कि एक ऐसी अभाज्य संख्या $p > 3$ होती है, जो $6n + 1$ या $6n + 5$ के रूप की नहीं होती।	
परिणामत: 3 से बड़ी प्रत्येक अभाज्य संख्या $6n + 1$ या $6n + 5$ रूप की है।	यह निष्कर्ष प्राप्त करते हैं।

■

टिप्पणी : ऊपर की उपपत्ति के उदाहरण से यह पता चलता है कि एक परिणाम को अनेक विधियों से सिद्ध किया जा सकता है।

प्रमेय A1.2 : *एक बिंदु से उस रेखा के, जो उस बिंदु से होकर नहीं जाती है, बिंदुओं को मिलाने वाले सभी रेखा-खंडों में लघुतम रेखा-खंड रेखा पर लंब होता है।*

उपपत्ति :

आकृति A1.5

कथन	विश्लेषण/टिप्पणी
मान लीजिए XY दी हुई रेखा है, P एक बिंदु है, जो XY पर स्थित नहीं है और PM, PA_1, PA_2, . . . आदि, बिंदु P से रेखा XY के बिंदुओं तक खींचे गए रेखा-खंड है जिनमें PM लघुतम रेखा-खंड है (आकृति A 1.5 देखिए)	क्योंकि हमें यह सिद्ध करना है कि सभी रेखा-खंडों PM, PA_1, PA_2, . . . आदि में लघुतम रेखा-खंड, XY पर लंब होता है, अतः सबसे पहले हम इन रेखा-खंडों को लेते हैं।
मान लीजिए PM, XY पर लंब नहीं है।	यह विरोधोक्ति द्वारा सिद्ध किए जाने वाले कथन का निषेध है।
रेखा XY पर PN लंब डालिए, जैसाकि आकृति A1.5 में बिंदुकित रेखा से दिखाया गया है।	परिणामों को सिद्ध करने के लिए हमें प्रायः रचना करने की आवश्यकता पड़ती है।
सभी रेखा-खंडों PM, PN, PA_1, PA_2, . . आदि में PN लघुतम रेखा-खंड है, जिसका अर्थ यह है कि $PN < PM$	समकोण त्रिभुज की भुजा कर्ण से छोटी होती है और संख्याओं के ज्ञात गुणधर्म।
यह हमारे इस परिकल्पना की विरोधोक्ति है कि ऐसी सभी रेखा-खंडों में PM लघुतम रेखा-खंड है।	यथातथ्य हम यही चाहते हैं।
अतः रेखा-खंड PM, XY पर लंब है।	हम निष्कर्ष पर आ जाते हैं।

प्रश्नावली A1.6

1. मान लीजिए $a + b = c + d$, और $a < c$, तो विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति का प्रयोग करके यह दिखाइए कि $b > d$

2. मान लीजिए r एक परिमेय संख्या है और x एक अपरिमेय संख्या है। विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति का प्रयोग करके यह दिखाइए कि $r + x$ एक अपरिमेय संख्या है।

3. विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति का प्रयोग करके यह सिद्ध कीजिए कि यदि किसी पूर्णांक a के लिए a^2 सम है, तो a भी सम होता है।

   [**संकेत :** मान लीजिए a सम नहीं है, अर्थात् यह $2n + 1$ के रूप का है, जहाँ n एक पूर्णांक है और तब आगे बढ़िए।]

4. 'विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति' का प्रयोग करके यह सिद्ध कीजिए कि यदि पूर्णांक a के लिए a^2, 3 से भाज्य हो, तो a, भी 3 से भाज्य है।

5. विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति का प्रयोग करके यह दिखाइए कि n का ऐसा कोई मान नहीं होता जिसके लिए 6^n का अंतिम अंक शून्य हो।

6. विरोधोक्ति का प्रयोग करके यह सिद्ध कीजिए कि एक समतल की दो रेखाएँ एक से अधिक बिंदु पर प्रतिच्छेद नहीं कर सकती हैं।

A1.8 सारांश

इस परिशिष्ट में, आपने निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है:

1. किसी उपपत्ति के विभिन्न अवयव और कक्षा 9 में पढ़ी गई अन्य संबंधित संकल्पनाएँ।
2. किसी कथन का निषेध।
3. किसी कथन का विलोम।
4. विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति।